УДК 519.8

Л. Д. Попов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО КВАЗИРЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ С ПРОТИВОРЕЧИВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

Рассматривается линейная задача о дополнительности с противоречивыми ограничениями. Устанавливается, что если матрица ее ограничений сильно коположительна или лежит в пересечении матричных классов Q_0 и P_0, где Q_0 — класс матриц, порождающих выпуклые конусы разрешимости, а P_0 — класс матриц, все главные миноры которых неотрицательны, то метод Лемке (с искусственной переменной) завершается на так называемом альтернативном луче, начало которого совпадает с решением исходной постановки, скорректированной в смысле чебышевского уклонения.

1. Постановка задачи

Пусть имеются вектор $q \in \mathbb{R}^n$ и вещественная $(n \times n)$-матрица M. *Линейная задача о дополнительности* $LCP(q, M)$ состоит в поиске векторов w и z из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$w = q + Mz, \quad w \geq 0, \ z \geq 0, \tag{1}$$

$$w^\top z = 0. \tag{2}$$

Эта задача является обобщением [1] ряда оптимизационных постановок в линейном и квадратичном программировании, теории матричных игр, математической экономике и др. В силу неотрицательности переменных соотношение (2) можно заменить на требование

$$w_i z_i = 0 \ \text{ при всех } i = 1, \ldots, n. \tag{2a}$$

Неизвестные z_i и w_i называют *дополнительными* друг к другу.

Подсистема (1) выписанных выше условий может оказаться противоречивой. В этом случае линейная задача о дополнительности называется *недопустимой.*

Недопустимость (противоречивость) математических моделей достаточно часто встречается в приложениях, особенно экономического характера [2, 3],

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №00-15-96041, 01-01-00563.

© Л. Д. Попов, 2002

что связано с существенной неточностью задания исходной информации, абсолютизацией отдельных ограничений и целей модели и рядом других факторов. Данные недопустимой задачи подлежат коррекции. Естественно стремиться к тому, чтобы такая коррекция осуществлялась в силу формальных процедур объективного характера.

Наиболее простой путь приведения системы (1) к разрешимому виду (и в прикладном отношении наиболее важный) состоит в коррекции вектора ее свободных членов q. Свяжем с исходной матрицей M, которая не будет подвергаться корректировке, множество *допустимости* исходной задачи

$$K_0(M) = \{\ q :\ \text{система (1) совместна}\ \}$$

и множество ее *разрешимости*

$$K(M) = \{\ q :\ \ \text{задача } LCP(q, M) \text{ разрешима}\ \}.$$

Эти множества, очевидно, не пусты, ибо содержат $\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант пространства переменных. Множество $K_0(M)$ представляет собой конус, порожденный векторами-столбцами расширенной матрицы $\mathcal{M} = (\ E \mid -M\ )_{n\times 2n}$, составленной из матриц E и $-M$. Это вытекает из того, что

$$q \in K_0 \quad \Longleftrightarrow \quad q = w - Mz \ \text{ при некоторых } w \geq 0,\ z \geq 0.$$

Второе множество $K(M)$ имеет более сложную структуру. Поскольку в любом решении линейной задачи о дополнительности в каждой паре дополнительных переменных (w_i, z_i) по крайней мере одна из переменных обращается в нуль, вектор свободных членов такой задачи лежит в конусе K'_I, порожденном векторами из набора

$$\mathcal{N} = \{E_i :\ i \in I\} \bigcup \{-M_i :\ i \notin I\},$$

где $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : w_i \neq 0\}$; E_i — i-й столбец матрицы E; M_i — i-й столбец матрицы M. Поэтому множество $K(M)$ представимо как объединение таких конусов K'_I по всем подмножествам I индексного множества $\{1, \ldots, n\}$, т. е.

$$K(M) = \bigcup_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} K'_I.$$

Так как разрешимая задача всегда допустима, то $K_0(M) \supseteq K(M)$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема 1 [4]. *Множества $K(M)$ и $K_0(M)$ совпадают в том и только в том случае, когда множество $K(M)$ выпукло.*

Класс матриц, порождающих выпуклые множества разрешимости, в литературе известен как класс Q_0.

Перейдем к формализации задачи корректировки вектора q. Сформулируем ее как оптимизационную: найти

$$\chi := \min_{\omega \in K(M)} \|q - \omega\|, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая монотонная векторная норма, например $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$.

В общем случае задача (3) многоэкстремальна. Любой ее оптимальный вектор $\omega(q)$ можно взять в качестве объективно откорректированных свободных членов системы (1). Соответственно сама исходная противоречивая постановка $LCP(q, M)$ *аппроксимируется* одной из ближайших к ней в информационном отношении разрешимой задачей $LCP(\omega(q), M)$.

В данной работе мы ограничимся исследованием случая $K(M) = K_0(M)$, т. е. будем предполагать, что задача (1), (2) разрешима всякий раз, как только система ее ограничений окажется совместной. Будем также считать, что в формулировке (3) используется взвешенная чебышевская норма

$$\|q - \omega\| = \max_{1 \le i \le n} \{\, \alpha_i \,|\, q_i - \omega_i \,|\, \},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — набор положительных весовых коэффициентов. При этих предположениях задача (3) превращается в обычную задачу линейного программирования

$$\min\{t : \ w = q + p\,t + Mz \ge 0, \ z \ge 0, \ t \ge 0\}, \tag{4}$$

где $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top > 0$. Вектор $\xi = (t, w, z)$ будет решением этой задачи в том и только в том случае, когда выполняются известные условия оптимальности

$$w = q + p\,t + Mz \ge 0, \ z \ge 0, \ t \ge 0; \tag{5}$$

$$\pi^\top M \le 0, \ \pi^\top p \le 1, \ \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \ge 0; \tag{6}$$

$$\pi^\top w = 0, \ \pi^\top Mz = 0, \ (\pi^\top p - 1)t = 0; \tag{7}$$

здесь $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — вектор множителей Лагранжа задачи (4).

В целом анализ недопустимой задачи о дополнительности может быть проведен в два этапа. На первом этапе ищется решение задачи (4), которое дает новый вектор правых частей, гарантирующий разрешимость откорректированной постановки. На втором этапе ищется решение откорректированной задачи. Наша цель — показать, что по крайней мере для сильно коположительных матриц M и тех матриц M из класса Q_0, чьи главные миноры неотрицательны, эти два этапа фактически *совмещаются* в одном из вариантов метода Лемке.

2. Искусственная переменная в методе Лемке

Кратко напомним итеративную технику Лемке–Хаусона, первоначально ориентированную на нахождение точек равновесия в биматричных играх, а затем распространенную на общий случай линейной задачи о дополнительности [5, 6]. Нам придется ввести в систему уравнений исходной задачи *искусственную* переменную z_0:

$$w = q + p\, z_0 + Mz; \tag{8}$$

здесь столбец при искусственной переменной $p = (p_1, \ldots, p_n)^\top > 0$. Решение параметризованной системы (8) будем называть *почти удовлетворяющим условиям дополнительности*, если $z_i\, w_i = 0$ при всех $i = 1, \ldots, n$, и *удовлетворяющим условиям дополнительности*, если также $z_0 = 0$.

Обозначим

$$\mathcal{P} = \{(w, z_0, z) : \ w = q + p\, z_0 + Mz, \quad z_0 \geq 0, \ z \geq 0, \ w \geq 0\}.$$

Множество $\mathcal{P}$ является полиэдральным. Его *крайними точками* (или вершинами) называют точки, не являющиеся серединами ни одного из лежащих в нем нетривиальных отрезков. Крайние точки множества $\mathcal{P}$ тесно связаны с допустимыми *базисными решениями* системы (8), т. е. решениями, ненулевым компонентам которых соответствуют линейно независимые столбцы матрицы ее коэффициентов. Понятно, что такие решения не могут содержать более n ненулевых компонент. Если число ненулевых компонент равно n, базисное решение принято называть *невырожденным. Невырожденной* называется и система уравнений, все базисные решения которой не вырождены. При предположении о невырожденности системы (8) крайние точки множества $\mathcal{P}$ находятся с допустимыми базисными решениями системы (8) во взаимно однозначном соответствии.

Процедура Лемке основана на переборе крайних точек множества $\mathcal{P}$. Она отталкивается от начала некоторого луча (неограниченного ребра множества $\mathcal{P}$), состоящего из точек $\eta = (w, z, z_0)$, почти удовлетворяющих условиям дополнительности, т. е. точек, у которых $z_i\, w_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Начальная точка строится следующим образом. Вначале неизвестные $w_1, \ldots, w_n$ составляют базис, а прочие неизвестные $z_0, z_1, \ldots, z_n$ остаются свободными. Придавая неизвестной z_0 достаточно большое положительное значение, можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

$$w = q + p\, z_0 > 0.$$

При снижении значения z_0 значения неизвестных w_i также будут понижаться. Начальная для метода Лемке крайняя точка множества $\mathcal{P}$ получится при минимальном значении $z_0 \geq 0$, обеспечивающем неравенство $w =$

$= q + p z_0 \geq 0$. Если $z_0 = 0$, то $q \geq 0$ и исходная задача имеет очевидное решение — вектор $(q;\, 0)$. В противном случае $z_0 > 0$ и среди компонент вектора w ровно одна, скажем w_r, обращена в нуль. Вводим z_0 в базис на место неизвестной w_r, которая переходит в разряд свободных.

Каждая итерация метода Лемке соответствует (как и в обычном симплекс-методе в линейном программировании) движению из крайней точки $\eta^{(k)}$ многогранного множества $\mathcal{P}$ вдоль некоторого его ребра, почти удовлетворяющего условиям дополнительности. Если это ребро ограничено, такое движение заканчивается в смежной крайней точке $\eta^{(k+1)}$, которая или также почти удовлетворяет условиям дополнительности, или удовлетворяет им точно. Процесс прекращается, если текущее ребро не ограничено, или точка $\eta^{(k+1)}$ уже генерировалась ранее, или она удовлетворяет условиям дополнительности точно (т. е. является решением исходной задачи). Последний случай реализуется, когда искусственная переменная z_0 покидает базис (обращается в нуль). Таким образом, переменная z_0 играет роль своеобразного параметра, начальное положительное значение которого в ходе вычислений доводится до нуля.

Так как в невырожденном допустимом базисном решении, почти (но *не точно*) удовлетворяющем условиям дополнительности, искусственная переменная z_0 положительна, т. е. является базисной, то в этом решении имеется ровно одна дополнительная пара (z_{j_0}, w_{j_0}), обе неизвестные которой свободны. Будем называть ее *небазисной* (*свободной*) *парой* неизвестных. Ребро, точки которого почти удовлетворяют условиям дополнительности, получается из текущего допустимого базисного решения путем *наращивания* значения одной из неизвестных, входящих в небазисную пару. Все прочие небазисные неизвестные остаются на нулевом уровне. Поэтому для каждой крайней точки, связанной с базисным решением, почти удовлетворяющим условиям дополнительности, имеется *ровно два ребра*, исходящих из нее и обладающих тем же свойством (т. е. почти удовлетворяющих условиям (2a)).

Пусть z_{j_0} — наращиваемая неизвестная небазисной пары. Вместе с ее ростом будут линейно изменяться значения всех базисных неизвестных. При достаточно малых положительных значениях z_{j_0} свойство допустимости решения будет сохраняться (это является следствием предположения о невырожденности системы (8)). Однако при значительном росте z_{j_0} допустимость может быть утеряна.

Если значение z_{j_0} может быть сделано сколь угодно большим без того, чтобы какая-либо базисная неизвестная приняла отрицательное значение, то мы имеем луч — неограниченное ребро множества $\mathcal{P}$. В этом случае процесс завершается (без получения решения исходной задачи). Если же рост неизвестной z_{j_0} *блокируется* некоторой базисной неизвестной (той, что в процессе убывания первой достигает нулевого уровня), мы приходим к новому базисному решению. Если z_0 — неизвестная, покинувшая базис, то перед нами решение исходной задачи. В противном случае имеем очередную крайнюю точку множества $\mathcal{P}$, почти удовлетворяющую условиям дополнительности. В этой точке наращиваемая и блокирующая неизвестные поменялись ролями: первая вошла в число базисных, вторая — в число свободных неизвестных.

Основное *правило метода Лемке* касается выбора очередной наращиваемой (вводимой в базис) неизвестной. А именно, наращивается значение той неизвестной, которая является дополнительной к неизвестной, покинувшей базис на предыдущем шаге (итерации).

Генерируемая последовательность крайних точек, почти удовлетворяющих условиям (2a), образует своего рода путь (*путь Лемке*) по границе множества $\mathcal{P}$. Ясно, что вдоль пути, почти удовлетворяющего условиям дополнительности, только исходное базисное решение может встретиться дважды. Поэтому если путь Лемке был начат из начала луча, почти удовлетворяющего условиям дополнительности, то метод прервется или на другом таком луче (называемом *альтернативным*), или на решении исходной задачи.

В принципе если в качестве начальной точки брать не начало некоторого луча, в методе Лемке можно столкнуться с явлением зацикливания. Зацикливание означает, что после некоторого числа шагов метод возвращается к исходной точке. Вместе с тем даже если исходная задача разрешима, метод с правильно выбранной точки может тем не менее завершиться на альтернативном луче.

3. Сильно коположительные матрицы

Матрица M называется *сильно коположительной* (в зарубежной литературе — *коположительной-плюс*), если она удовлетворяет условиям

$$x^\top M x \geq 0 \quad \text{при всех } x \geq 0, \tag{9}$$

$$(M + M^\top)x = 0 \quad \text{при всех } x \geq 0,\ x^\top M x = 0. \tag{10}$$

Класс таких матриц достаточно широк и, в частности, включает в себя

1) класс строго коположительных матриц, т. е. матриц M, для которых $x^\top M x > 0$ при всех $0 \neq x \geq 0$;

2) класс положительно полуопределенных матриц, т. е. таких M, что $x^\top M x \geq 0$ при всех x.

Положительные матрицы очевидно строго коположительны. Однако, как показывают примеры, матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A > 0,\ B > 0,$$

не обязательно удовлетворяют условиям (10). Из матриц M_1 и M_2, удовлетворяющим условиям (9), (10), можно составить блочные матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

которые также оказываются сильно коположительными. Более того, если S — кососимметричная матрица, то $M + S$ также будет сильно коположительной. Следовательно, блочная матрица вида

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & -A^\top \\ A & M_2 \end{pmatrix}$$

будет сильно коположительной тогда и только тогда, когда сильно коположительными будут M_1 и M_2.

Класс сильно коположительных матриц интересен тем, что для линейной задачи о дополнительности, матрица которой принадлежит ему, завершение метода Лемке на альтернативном луче означает противоречивость системы ее ограничений [1]. Следовательно, для коположительных матриц M имеет место равенство $K(M) = K_0(M)$, т. е. $M \in Q_0$. Следующее утверждение уточняет этот факт.

Теорема 2. *Пусть матрица M сильно коположительна и метод Лемке завершается на альтернативном луче. Тогда ограничения линейной задачи о дополнительности $LCP(q, M)$ противоречивы. Если при этом в качестве вспомогательного вектора при искусственной переменной был выбран вектор $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top > 0$, то начало альтернативного луча (w, z, z_0), на котором метод Лемке завершит работу, обладает свойством: пара (w, z) будет решением задачи $LCP(\omega, M)$, где $\omega = q + p\, z_0 \in K(M)$; $z_0 = \bar{t}$, $\bar{t}$ — оптимальное значение задачи* (4).

Доказательство. Завершение алгоритма на альтернативном луче означает, что найдены его начало — допустимое базисное решение (w, z_0, z) системы (8) с $z_0 > 0$ — и его направление, т. е. вектор $(\bar{w}, \bar{z}_0, \bar{z})$ такой, что

$$\bar{w} = p\bar{z}_0 + M\bar{z}, \quad (\bar{w}, \bar{z}_0, \bar{z}) \geq 0, \tag{11}$$

и при всех $\lambda \geq 0$ выполняются условия

$$w + \lambda\bar{w} = q + p\,(z_0 + \lambda\bar{z}_0) + M\,(z + \lambda\bar{z}), \tag{12}$$

$$(w_i + \lambda\bar{w}_i)\,(z_i + \lambda\bar{z}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Точка (w, z) будет, очевидно, решением скорректированной линейной задачи о дополнительности, которая отличается от исходной только вектором свободных членов $q + p\,z_0$. Действительно, эта точка неотрицательна, удовлетворяет подправленной системе ограничений и для нее выполнены условия дополнительности.

Покажем, что тройка $(t = z_0, w, z)$ дает также решение задачи оптимального выбора вектора коррекции (4), т. е. $z_0 = \bar{t} = \chi > 0$. Для этого проведем анализ условий (9)–(13).

Во-первых, поскольку $(\bar{w}, \bar{z}_0, \bar{z}) \neq 0$, то случай $\bar{z} = 0$ невозможен, иначе величина $\bar{z}_0$ была бы положительной, а вслед за ней положительным оказался бы вектор $\bar{w}$, что, в силу (13), означало бы равенство $z + \lambda\bar{z} = z = 0$ и тем самым совпадение конечного луча с начальным.

Во-вторых, все точки альтернативного луча почти удовлетворяют условиям дополнительности, т. е.

$$z_i\, w_i = z_i\, \bar{w}_i = \bar{z}_i\, w_i = \bar{z}_i\, \bar{w}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Это, в силу (11), влечет равенства

$$0 = \bar{z}^\top \bar{w} = \bar{z}^\top p\, \bar{z}_0 + \bar{z}^\top M \bar{z}. \tag{15}$$

Но матрица M сильно коположительна и $\bar{z} \geq 0$. Поэтому оба слагаемых в правой части (15) неотрицательны и, следовательно, равны нулю. Скаляр $\bar{z}_0$ равен нулю, потому что $\bar{z}^\top p > 0$.

Равенство нулю квадратичной формы $\bar{z}^\top M \bar{z}$ означает по предположению, что

$$M\bar{z} + M^\top \bar{z} = 0.$$

В силу (11) равенство $\bar{z}_0 = 0$ влечет $\bar{w} = M\bar{z} \geq 0$, т. е. по предыдущему $M^\top \bar{z} \leq 0$ или, что то же, $\bar{z}^\top M \leq 0$. И, в силу (14),

$$0 = z^\top \bar{w} = z^\top M \bar{z} = z^\top (-M^\top \bar{z}) = \bar{z}^\top M z.$$

Таким образом,

$$\bar{z} \neq 0, \quad \bar{z}^\top w = 0, \quad \bar{z}^\top M \leq 0, \quad \bar{z}^\top M z = 0. \tag{16}$$

Это позволяет определить вектор множителей Лагранжа

$$\pi = \left(\frac{1}{\bar{z}^\top p}\right) \bar{z},$$

который неотрицателен и, в силу (16), вместе с тройкой $(t = z_0, w, z)$ удовлетворяет условиям оптимальности (5)–(7) для задачи (4). Теорема доказана.

Заметим, что и в общем случае, т. е. для произвольной матрицы M, начало альтернативного луча (w, z, z_0) в методе Лемке всегда дает решение (w, z) скорректированной задачи $LCP(q + p\, z_0, M)$. Однако ни минимальность вносимых изменений, ни даже сама противоречивость ограничений и неразрешимость исходной задачи при этом могут не иметь места. Например, применим метод Лемке к задаче, в которой

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первая же итерация метода даст альтернативный луч с $z_0 = 1 > 0$, хотя задача имеет решение:

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Этот пример разобран в [4].

4. Матрицы с неотрицательными главными минорами

Рассмотрим теперь класс матриц, все главные миноры которых неотрицательны. В литературе он известен как класс P_0. Этот класс обладает многими важными для приложений свойствами и играет заметную роль в теории линейных задач о дополнительности. Однако сам по себе он слишком широк для наших целей; на это, в частности, указывает приведенный выше пример, который не может быть решен методом Лемке, несмотря на то, что его матрица является P_0-матрицей. Поэтому ограничимся рассмотрением матриц из более узкого класса, а именно пересечения $P_0 \cap Q_0$.

К сожалению, совокупность Q_0-матриц, у которых все главные миноры неотрицательны, не включается ни в один из хорошо изученных матричных классов. Некоторая конструктивная характеризация таких матриц получена в [7]. Чтобы представить ее, введем следующие обозначения. Пусть I и J — произвольные подмножества индексного множества $\{1, \dots, n\}$. Тогда M_{IJ} будет обозначать подматрицу $(n \times n)$-матрицы M, составленную из всех строк с номерами из I и всех столбцов с номерами из J. Если $I = \{1, \dots, n\}$ или $J = \{1, \dots, n\}$, будем писать $M_{\cdot J}$ или $M_{I\cdot}$ соответственно. Если I или J состоят из единственного индекса, скажем i, будем писать просто i. Наконец, если $I \subset \{1, \dots, n\}$ — индексное множество, то $\bar{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I$ будет обозначать его дополнение.

Будем говорить, что матрица M обладает T-свойством, если для произвольного индексного набора I и решения u системы неравенств

$$M_{II}\, u \le 0, \quad M_{\bar{I}I}\, u \ge 0, \quad u > 0,$$

найдется такой ненулевой вектор $v \geq 0$, что

$$v^\top M_{I.} \leq 0, \quad v^\top M_{II}\, u = 0.$$

Заметим также, что процесс смены базисов в методе Лемке порождает последовательность так называемых *преобразованных матриц* $\bar{M}$ со следующей блочной структурой:

$$\bar{M}_{JJ} = M_{JJ}^{-1}, \quad \bar{M}_{J\bar{J}} = -M_{JJ}^{-1}\, M_{J\bar{J}},$$
$$\bar{M}_{\bar{J}J} = M_{\bar{J}J}\, M_{JJ}^{-1}, \quad \bar{M}_{\bar{J}\bar{J}} = M_{\bar{J}\bar{J}} - M_{\bar{J}J}\, M_{JJ}^{-1}\, M_{J\bar{J}};$$

здесь J — непустое множество индексов тех переменных группы z, что вошли в базис.

Упомянутая выше характеризация дается следующим утверждением.

Теорема 3 [7]. *Если матрица M принадлежит пересечению $Q_0 \cap P_0$, то она обладает T-свойством, как и все получаемые из нее сменой базиса (в силу метода Лемке) преобразованные матрицы $\bar{M}$. Обратно, если все главные миноры матрицы M неотрицательны, а сама она и все получаемые из нее сменой базиса матрицы $\bar{M}$ обладают T-свойством, то такая матрица принадлежит классу Q_0.*

На основе приведенной характеризации матриц из $Q_0 \cap P_0$ в [7] получен важный результат: метод Лемке, примененный к задаче с матрицей из этого класса, или находит (базисное) решение задачи, или демонстрирует противоречивость ее ограничений. На самом деле, как показывает следующее утверждение, в последнем случае мы опять получаем чебышевское квазирешение исходной постановки.

Теорема 4. *Пусть матрица M лежит в пересечении $P_0 \cap Q_0$ и метод Лемке завершается на альтернативном луче. Тогда ограничения линейной задачи о дополнительности $LCP(q, M)$ противоречивы. Если при этом в качестве вектора при искусственной переменной был выбран вектор $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top > 0$, то начало альтернативного луча (w, z, z_0), на котором метод Лемке завершит работу, обладает свойством: пара (w, z) будет решением задачи $LCP(\omega, M)$, где $\omega = q + p\, z_0 \in K(M)$; $z_0 = \bar{t}$; $\bar{t}$ — оптимальное значение задачи* (4).

Доказательство. Мы могли бы, как и в предыдущем разделе, вывести условия оптимальности типа (5)–(7) для последнего базисного решения, получаемого методом Лемке, опираясь на приведенное выше T-свойство матрицы M.

Проще, однако, воспользоваться известным фактом [4] монотонного невозрастания значения искусственной переменной вдоль пути Лемке для задач, матрица ограничений которых принадлежит классу P_0.

Итак, наряду с исходной задачей (1), (2) рассмотрим скорректированную постановку

$$w = \bar{q} + Mz, \quad w \geq 0, \ z \geq 0, \tag{17}$$

$$w^\top z = 0, \tag{18}$$

где $\bar{q} = q + p\,\bar{t}$, $\bar{t}$ — решение задачи (4). Поскольку ограничения (17) теперь совместны, а $M \in P_0 \cap Q_0$, то, как уже отмечалось, метод Лемке, примененный к откорректированной постановке и перебирающий крайние точки смещенного множества

$$\bar{\mathcal{P}} = \{(w, z_0, z): \ w = \bar{q} + p\,z_0 + Mz, \quad z_0 \geq 0, \ z \geq 0, \ w \geq 0\},$$

через конечное число итераций приведет нас к ее решению.

Пусть число этих итераций отлично от нуля (иначе можно сразу перейти к последнему абзацу раздела). Покажем, что возникающая при этом последовательность базисов совпадает с началом последовательности базисов, возникающих в методе Лемке, примененном к исходной задаче (1), (2).

В самом деле, метод Лемке, отнесенный к откорректированной постановке, начнет работу с базиса, в который войдут все w-переменные за исключением той, чей номер отвечает минимальному отношению

$$\bar{\theta} = \min_{i \in I_0} \frac{\bar{q}_i}{p_i}, \quad \text{где } I_0 = \{i: \ \bar{q}_i < 0\};$$

ее место в базисе займет z_0 (см. описание алгоритма). С этого же базиса может начать работу и метод Лемке, отнесенный к исходной постановке, так как для нее минимальное отношение

$$\theta = \min_{i \in I} \frac{q_i}{p_i}, \quad \text{где } I = \{i: \ q_i < 0\},$$

достигается на тех же значениях индекса i, что и значение $\bar{\theta}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\bar{q}_i/p_i = q_i/p_i + \bar{t}$, т. е. все сравниваемые отношения отличаются на одну и ту же величину. При этом множество индексов I_0 содержится, очевидно, в I, но включает в себя те индексы, на которых достигается θ : если $q_i/p_i = \theta$, то $\bar{q}_i = q_i + p_i\bar{t} < q_i - p_i\theta = 0$, так как $\theta < -\bar{t}$ (иначе метод Лемке завершился бы сразу, на начальной точке).

В дальнейшем номер переменной, вводимой в базис, однозначно определяется номером переменной, покинувшей его на предыдущем шаге. Покидающая базис переменная, в свою очередь, определяется на основе расчета минимальных отношений базисных компонент решений к соответствующим им положительным коэффициентам столбца преобразованной матрицы, отвечающего вводимой в базис переменной. Они будут одними и теми же как для исходной, так и для откорректированной задачи вплоть до того момента, пока во втором случае искусственная переменная не покинет базис, т. е. пока метод Лемке не завершит работу на решении откорректированной постановки. Это следует из того, что и в первом, и во втором случае все базисные компоненты решений просто совпадают, за исключением находящейся в базисе искусственной переменной z_0; ее значения, очевидно, различаются для двух задач на одну и ту же величину $\bar{t}$. При этом искусственная переменная не может покинуть базис исходной задачи, так как это означало бы разрешимость последней.

Таким образом путь Лемке для откорректированной задачи дает начало пути Лемке для исходной задачи вплоть до того момента, пока первая из этих задач не окажется решенной, что произойдет, когда искусственная переменная z_0 покинет ее базис. В этот момент значение искусственной переменной z_0 в базисном решении исходной задачи будет равно $\bar{t}$. В дальнейшем оно не может возрасти по уже упоминавшемуся свойству монотонности, справедливому для произвольных P_0-матриц. В то же время оно не может и уменьшиться, так как в противном случае мы получили бы допустимые решения системы

$$w = q + p\,t + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad t < \bar{t},$$

что противоречит свойству минимальности $\bar{t}$. Поскольку метод все же завершится на альтернативном луче, отвечающее его началу базисное решение будет удовлетворять всем искомым требованиям. Теорема доказана.

5. Заключение

В работе для линейной задачи о дополнительности с противоречивыми ограничениями введено понятие чебышевского квазирешения и приведены условия, при которых это квазирешение может быть получено обычным методом Лемке. Условия сформулированы в терминах принадлежности матрицы ограничений недопустимой задачи определенным матричным классам. Из близких по тематике работ можно отметить [8], где рассмотрены вопросы оптимальной коррекции матриц ограничений допустимых, но неразрешимых задач о дополнительности: при этом применены методы гомотопии и ряд идей из векторной оптимизации.

Литература

1. Cottle R. W., Dantzig G. B. Complementarity pivote theory of mathematical programming // Linear Algebra and its Applications. 1968. Vol. 1, №1. P. 103–125.
2. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
3. Еремин И. И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
4. Eaves B. C. The linear complementarity problem // Management Science. 1971. Vol. 17. P. 612–634.
5. Lemke C. E. Some pivote schemes for linear complementarity problem // Math. Programming Study. 1978. Vol. 27. P. 15–35.
6. Lemke C. E., Howson J. T. Equilibrium points of bimatrix games // SIAM Review. 1964. Vol. 12. P. 45–78.
7. Aganagic M., Cottle R. W. A constructive characterization of Q_0-matrices with nonnegative principal minors // Math. Programming. 1987. Vol. 37, № 2. P. 223–231.
8. Isac G., Kostreva M. M., Wiecek M. M. Multiple-objective approximation of feasible but unsolvable linear complementarity problems // J. Optimization. Theory and Appl. 1995. Vol. 86, №2. P. 389–405.

Статья поступила 11.02.2002 г.